Complexe functies in twee vensters

Een andere manier om complexe functies voor te stellen is via een dubbel venster. In het eerste venster wordt het domein getekend: het complexe *xy*-vlak. In het tweede venster wordt het bereik getekend: het complexe *uv*-vlak. Indien je een gepast softwarepakket gebruikt kun je in het eerste venster cirkels, rechten, veelhoeken, rasterlijnen, … tekenen waarvan in het tweede venster automatisch het beeld verschijnt. Uit de vormtransformatie van deze meetkundige objecten kun je heel wat leren over complexe transformaties.

1. Start het programma 'VU-Grafiek'. Kies voor 'VU-Grafiek PLUS' en daarna voor 'Complexe functies'. Er verschijnt een invulblad waarop je het voorschrift $f(z)=z^3$ kan invullen. Dit is de complexe functie die we eerst zullen bestuderen. Kies een gunstig bereik voor de twee vensters, bijvoorbeeld $[-2,2]\times[-2,2]$ voor het *xy*-vlak en $[-16,16]\times[-16,16]$ voor het *uv*-vlak. Klik op OK. Het dubbele venster verschijnt. Zoek nog even de knop om de twee assen van elke stelsel gelijk te ijken. Dit is nodig omdat we in vraag 3 hoeken gaan meten.
   - Teken in het domein drie lijnstukken die samen een driehoek vormen. Neem de hoekpunten van de driehoek bij voorkeur op roosterpunten maar niet in de oorsprong. De driehoek mag ook de oorsprong niet omvatten. In het tweede venster verschijnt nu een vervormde driehoek. Zet de knop 'trace' aan en kijk welk hoekpunt van de originele driehoek afgebeeld wordt op welk hoekpunt van de vervormde driehoek. Druk je scherm af en benoem corresponderende hoekpunten met corresponderende letters.
   - Teken manueel in elk hoekpunt van de vervormde driehoek twee raaklijnen aan de zijden van deze driehoek. Meet daarna de hoekgrootten op van de originele driehoek en van de beelddriehoek. Wat merk je?
2. Meet na over welke hoek de drie hoeken van de driehoek 'gekanteld' zijn.
3. Bereken de beelden van de complexe getallen in *A*, *B* en *C* door middel van de functies $f'(z)=3\cdot z^2$ en $\arg\left(f'(z)\right)=\arg\left(3\cdot z^2\right)$.
4. Welk verband bemerk je tussen de antwoorden van vraag 3 en vraag 4?
5. Waarom kan het beeld van een driehoek na een conforme transformatie niet gelijk zijn aan een zeshoek?
6. Conforme transformaties beelden scherpe hoeken af op scherpe hoeken en stompe hoeken op stompe hoeken. Kun je hieruit afleiden dat conforme transformaties convexe figuren afbeelden op convexe figuren en concave op concave?
7. Verander het voorschrift van de complexe transformatie in $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$. Teken een massa cirkels in het eerste venster. Welke beelden hebben een knik? Zijn er cirkels waarvan de beelden meerdere knikken hebben? Hoe verklaar je dit?
8. Bestaat er een cirkel die vier knikken krijgt na een afbeelding door de complexe functie $f(z)=z^5-80z$?